

OPCIÓ B

Tots els problemes tenen la mateixa puntuació

PROBLEMA 1:

Sigui E un K - espai vectorial amb una base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$. Sigui f l'única aplicació lineal $f: E \rightarrow E$ tal que

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_2 + u_3 \\ f(u_2) &= u_1 + u_2 + 2u_3 \\ f(u_3) &= 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 \end{aligned}$$

Si $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,2,1), (1,0,1), (0,0,1)\}$, calcula

- $f(3,1,2)$.
- la matriu de f respecte de la base B .
- la dimensió del nucli de f .
- la dimensió de la imatge de f .

PROBLEMA 2:

El temps de vida d'una bombeta (X) té una distribució de probabilitat amb funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

on x està expressada en milers d'hores i c es una constant positiva. Es demana:

- Determinar el valor de la constant c .
- Calcular $E(X)$ i $Var(X)$.
- Determinar la funció de distribució de X .
- Calcular la probabilitat que una bombeta, que ja ha durat 400 hores, duri 200 hores més.
- S'encenen n bombetes d'aquest tipus de manera simultània per tal de determinar la seva durada en funcionament. Es suposa que les bombetes funcionen de manera

independent unes d'altres i que el seu temps de vida segueix la funció de probabilitat anterior (és a dir, són independents i idènticament distribuïdes). Determina la funció de densitat de la variable aleatòria Y , que representa el temps d'espera fins que deixa de funcionar la primera bombeta.

PROBLEMA 3:

Siguin A i B els punts mitjans dels costats \overline{EF} i \overline{DE} d'un triangle equilàter DEF inscrit en una circumferència. S'estén el segment \overline{AB} pel seu extrem B fins tallar la circumferència en un punt C . Demuestra que B divideix \overline{AC} segons la proporció àuria:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \phi$$

PROBLEMA 4:

En un riu d'amplada a metres s'ha construït un canal perpendicular d'amplada b metres. Quina ha de ser la longitud màxima que podrà tenir un vaixell que navegui pel riu per poder passar a navegar pel canal?

Nota: considera el vaixell com un segment

PROBLEMA 5:

Sigui x un número real.

a) Prova que $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ per a qualsevol n natural, dedueix que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ i determina el radi de convergència de l'anterior identitat.

b) Desenvolupa en sèrie de potències la funció $f(x) = \frac{3}{2+5x^2}$, i determina el seu radi de convergència.

c) Calcula $f^{(n)}(0)$.

d) Planteja un problema contextualitzat, amb diferents apartats, a partir de la identitat del punt a). Resol el problema de manera detallada, tot assenyalant els coneixements previs necessaris.